2.2. JEDNORODNOŚĆ CIĄGÓW POMIAROWYCH

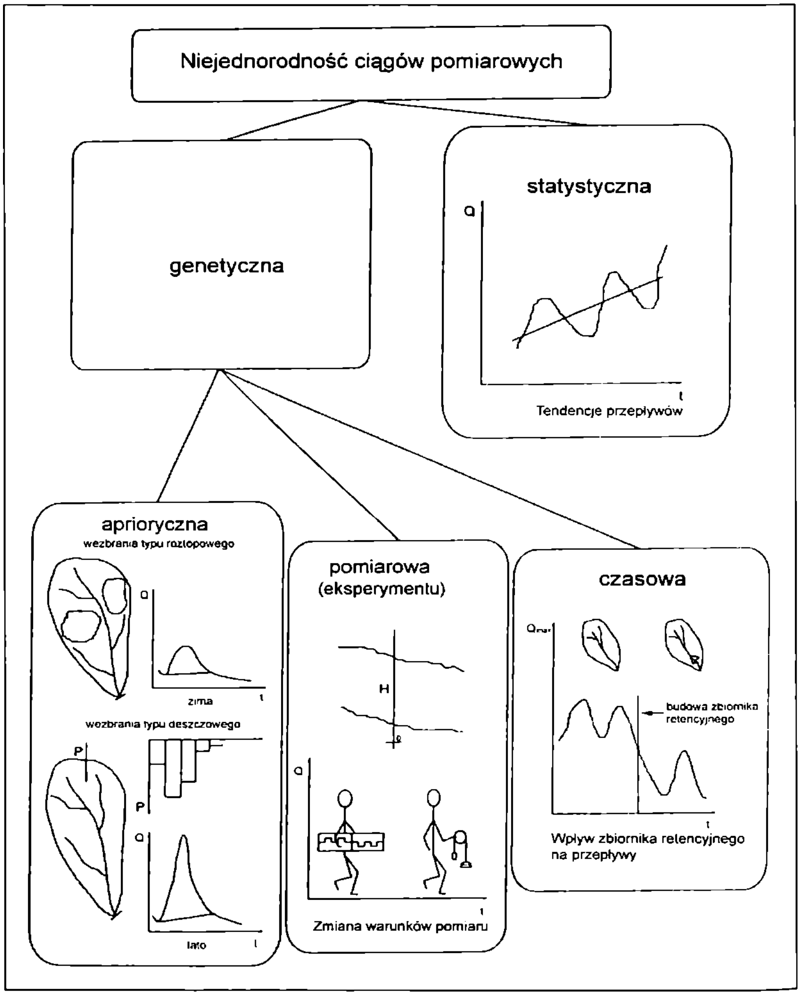
Warunkiem pozwalającym na uzyskanie poprawnych wyników obliczeń hydrologicznych jest jednorodność ciągów pomiarowych wykorzystywanych w tych obliczeniach. Dlatego też, przed przystąpieniem do obliczeń, należy sprawdzić, czy dany ciąg jest jednorodny, tzn. czy czynniki warunkujące przebieg badanego zjawiska są stałe i niezmienne, oraz czy warunki przeprowadzenia pomiaru, tj. metoda, przyrządy, miejsce, czas i gęstość próbkowania, były takie same podczas trwania eksperymentu. Zmiana tych czynników i warunków wywołuje niejednorodność ciągu pomiarowego. Wyróżnia się dwa rodzaje niejednorodności: genetyczną i statystyczną (ryc. 2.2.1).

Ze względu na przyczyny decydujące o **niejednorodności genetycznej** wyróżnia się niejednorodność aprioryczną, czasową i eksperymentu.

Niejednorodność aprioryczna wynika z faktu, iż dane zjawisko może być wywołane różnymi przyczynami: np. wezbrania mogą być spowodowane opadami lub roztopami. Zatem, jeśli rozpatruje się – na przykład – przepływy maksymalne, powinno się uwzględnić podział ciągu przepływów maksymalnych na wezbrania pochodzenia roztopowego oraz wezbrania pochodzenia opadowego. Geneza tych zjawisk jest bowiem różna.

Niejednorodność czasowa występuje wówczas, gdy zmieniają się czynniki warunkujące występowanie i przebieg danego zjawiska. Współcześnie, coraz intensywniejsza działalność gospodarcza powoduje zamierzoną bądź niezamierzoną ingerencję człowieka w środowisko wodne, zmieniając warunki kształtujące odpływ. Przykładami działań bezpośrednio wpływających na odpływ są pobory i zrzuty wód powierzchniowych i podziemnych, magazynowanie wody w zbiornikach retencyjnych, budowa systemów melioracyjnych. Z kolei takie zjawiska, jak: urbanizacja, zmiany użytkowania ziemi, działalność górnicza, wylesianie, są przyczynami pośrednimi, powodującymi (często niezamierzone) zmiany obiegu wody. Jednorodność czasowa występuje wówczas, gdy na badane zjawisko mają wpływ czynniki niezmienne w czasie, co wiąże się ze **stacjonarnością** zjawiska. Określenie „zjawisko stacjonarne" jest równoznaczne z określeniem „zjawisko o czasowej genetycznej jednorodności". Stacjonarność lub niestacjonarność można stwierdzić poprzez analizę czynników mających wpływ na dane zjawisko w całym okresie pomiarowym. Zarówno ingerencja zamierzona, jak

Niejednorodność ciągów pomiarowych może być spowodowana regulacją koryta rzecznego (Czyżówka – dopływ Wisły, rejon Zawichostu)

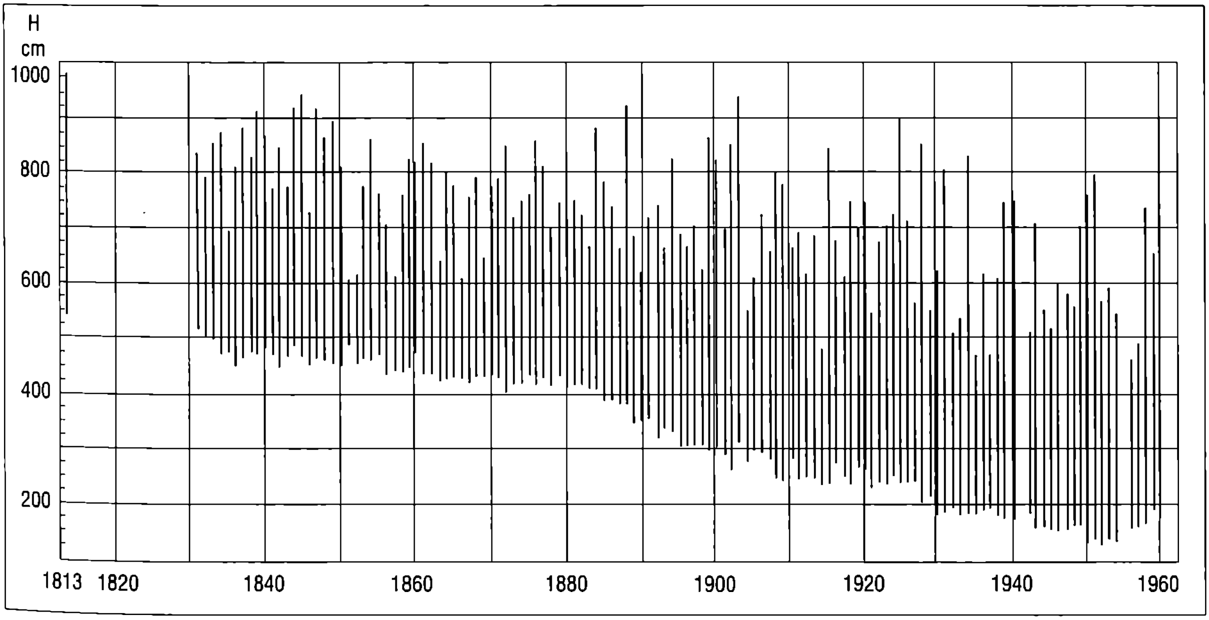


Ryc. 2.2.1. Rodzaje niejednorodności ciągów (Ozga-Zieliński, 1999)

i niezamierzona powodują często takie zmiany, które w konsekwencji prowadzą do utraty jednorodności ciągów pomiarowych obserwowanych zjawisk hydrologicznych.

Niejednorodność eksperymentu (pomiarowa) spowodowana jest zwykle niejednakowymi warunkami pomiaru, np. zmianą przyrządów, metod i terminu.

Przykładem ciągu niejednorodnego genetycznie są „pozornie malejące" minimalne roczne stany wody Wisły w Krakowie w XIX i XX w. (ryc. 2.2.2). Ich przebieg wskazuje wyraźnie na tendencję malejącą, co nie jest wynikiem malejących przepływów, lecz pogłębiania się dna koryta wskutek erozji wgłębnej. Zjawisko to zostało spowodowane pracami regulacyjnymi, polegającymi m.in. na skróceniu koryta o około 33% na odcinku między Krakowem i Niepołomicami. Proces erozji został zahamowany dopiero w latach 50. XX stulecia wybudowaniem stopnia wodnego w Krakowie-Dąbiu.

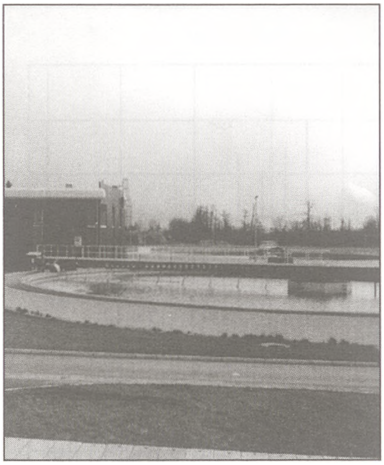


Ryc. 2.2.2. Maksymalne i minimalne stany wody Wisły w Krakowie w latach 1813–1960 (Trafas, 1975)

Przed przystąpieniem do obliczeń, powinno się wyeliminować niejednorodność genetyczną. W tym celu należy przeanalizować czynniki wpływające na badane zjawisko (patrz rozdz. 4.7) oraz warunki wykonywania pomiarów. Warto przy tym skorzystać z wizualnej oceny ciągu na podstawie wykresu badanej zmiennej. Można wówczas wykryć tendencję (malejącą lub rosnącą) w przebiegu zmiennej i zastanowić się nad potencjalnymi przyczynami niejednorodności.

Kolejnym krokiem procedury analizy niejednorodności ciągów pomiarowych jest badanie **niejednorodności statystycznej**, odzwierciedlającej wpływ czynników, które trudno wyodrębnić i określić, a które wpływają na zmianę własności statystycznych ciągów. Chodzi o to, aby wykryć niejednorodność, której nie było lub nie została wykryta podczas wcześniejszej analizy. Zdarza się, iż stwierdzenie niejednorodności statystycznej ciągu zwraca uwagę na istnienie niejednorodności genetycznej, i dopiero powtórna, szczegółowa analiza ciągu pozwala precyzyjnie określić przyczyny niejednorodności genetycznej.

Do badania niejednorodności statystycznej można zastosować tzw. nieparametryczne testy istotności. Jednym z nich jest **test Kruskala-Wallisa,** zwany testem sumy rang. Wymagane jest, aby rozkład badanej niezależnej zmiennej losowej był ciągły. Test sumy rang służy do weryfikacji hipotezy H_0, że k prób o liczebnościach n_i (i = 1, 2,..., k) i o dowolnych rozkładach z ciągłymi dystrybuantami $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_k(x)$ pochodzi z jednej zbiorowości generalnej,



Zrzuty wód z oczyszczalni ścieków do rzek naruszają jednorodność czasową ciągów hydrologicznych

tzn. $F_1(x) = F_2(x) = ... = F_k(x)$. Elementy ciągu pomiarowego należy uporządkować w ciąg niemalejący i każdemu elementowi należy nadać rangę (kolejny numer) od 1 do n. Jeśli elementy ciągu mają takie same wartości, wówczas nadawana im ranga jest równa średniej arytmetycznej rang, które wystąpiłyby, gdyby wartości tych elementów były różne. Następnie, ciąg pomiarowy należy podzielić na k prób, uwzględniając przy tym punkty niejednorodności wykryte podczas analizy wizualnej ciągu. Dla każdej próby wyznacza się oddzielnie sumę rang T_i ($i = 1, 2,..., k$) elementów danej próby i wyznacza wartość statystyki χ^2:

$$\chi^2 = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - 3(n+1) \qquad (2.2.1)$$

gdzie:

n – liczebność ciągu pomiarowego,

k – liczba porównywanych prób,

T_i – suma rang elementów w i-tej próbie,

n_i – liczebność i-tej próby.

Jeżeli sprawdzana hipoteza, że wszystkie próby pochodzą z jednej zbiorowości generalnej, tzn. że są to próby jednorodne, jest prawdziwa, to sumy rang dla poszczególnych prób nie powinny się istotnie różnić. Statystyka χ^2 używana w tym teście ma asymptotyczny rozkład o k–1 stopniach swobody.

Dla przyjętego poziomu istotności α i dla k–1 stopni swobody, z tablicy rozkładu χ^2 Pearsona odczytuje się wartość krytyczną χ^2 tak, aby zachodziło $P\{\chi^2 \geq \chi_\alpha^2\} = \alpha$ (tab. 2.2.1). Jeżeli obliczona wartość statystyki $\chi^2 \geq \chi_\alpha^2$, to hipotezę H_0 należy odrzucić. Jeśli $\chi^2 < \chi_\alpha^2$, wówczas nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0, co oznacza, że wszystkie próby są jednorodne.

Tab. 2.2.1. Wartości krytyczne χ^2 rozkładu χ^2 Pearsona dla k -1 stopni swobody oraz poziomów istotności $\alpha = 0,1$ i $\alpha = 0,05$

k - 1	α		k - 1	α	
	0,1	0,05		0,1	0,05
1	2,706	3,841	11	17,275	21,026
2	4,605	5,991	12	18,549	22,362
3	6,251	7,815	13	19,812	23,685
4	7,779	9,488	14	21,064	24,996
5	9,236	11,070	15	22,307	26,296
6	10,645	12,592	16	23,542	27,587
7	12,017	14,067	17	24,769	28,869
8	13,362	15,507	18	25,989	30,144
9	14,684	18,307	19	27,204	31,410
10	15,987	19,675	20	28,412	32,671

Jeżeli w n-elementowej próbie występuje duża liczba elementów o jednakowych wartościach, należy uwzględnić poprawkę c i wówczas wartość testowanej statystyki określana jest według wzoru:

$$\chi_c^2 = \frac{\chi^2}{c} \tag{2.2.2}$$

w której:

χ^2 – statystyka obliczona bez uwzględnienia poprawki c równej:

$$c = 1 - \frac{1}{n^3 - n} \sum_{j=1}^{m} S_j \tag{2.2.3}$$

gdzie:

n – suma liczebności wszystkich badanych prób,

$\sum_{j=1}^{m} S_j$ – suma poprawek dla m grup elementów o jednakowych wartościach,

$S_j = s^3 - s$, gdzie s oznacza liczbę elementów o tej samej wartości w j-tej grupie.

Prostym i łatwym w zastosowaniu jest także **test współczynnika korelacji rangowej Spearmana**. Wymaga on także rozkładu ciągłego zmiennej losowej. Test ten polega na nadawaniu rang (kolejnych numerów) elementom ciągu chronologicznego oraz nadawaniu rang tym samym elementom próby w ciągu rosnącym lub malejącym. Różnice rang pomiędzy tymi samymi elementami próby ciągu chronologicznego i ciągu rosnącego (lub malejącego) świadczą o występowaniu lub niewystępowaniu trendu w próbie. Jeżeli prawdziwa jest hipoteza H_0, że próba nie posiada trendu (czyli jest jednorodna), wówczas wartości różnic rang nie powinny istotnie odbiegać od wartości 0. W teście tym statystyka stosowana do budowy obszaru krytycznego posiada rozkład t-Studenta z n - 2 stopniami swobody (n – liczebność próby). Elementom próby ciągu chronologicznego nadaje się rangi X o wartościach od 1 do n. Następnie, próba porządkowana jest w ciąg rosnący (lub malejący) i elementom próby nadaje się rangi Y o wartościach od 1 do n. Na podstawie rang oblicza się wartość współczynnika korelacji rangowej Spearmana r_s według wzoru:

$$r_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \sum_{i=1}^{n} d_i^2}{2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2}} \tag{2.2.4}$$

gdzie:

$x_i = X_i - X_{śr}$

Wprowadzenie korekcji progowej i betonowej zabudowy koryta powoduje niejednorodność ciągów (dopływ Krośnicy, Gorce)

$$y_i = Y_i - Y_{śr}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{n^3 - n}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{n^3 - n}{12} - \sum_{i=1}^{n} T_{yi}$$

$\sum_{i=1}^{n} T_{yi}$ – suma k poprawek dla rang ciągu rosnącego (malejącego) obliczana, gdy w próbie występują elementy o tej samej wartości,

$$T_{yi} = \frac{l^3 - l}{12}$$

gdzie l jest liczbą elementów o tej samej wartości w próbie.

Na podstawie współczynnika korelacji rangowej Spearmana wyznacza się wartość statystyki t według wzoru:

$$t = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}} \qquad (2.2.5)$$

model prognostyczny – model mający na celu ocenę statystyczną zjawiska, które nastąpi w przyszłości

Statystyka t ma asymptotyczny rozkład t-Studenta z $n - 2$ stopniami swobody, przy $n \geq 10$. Dla przyjętego z góry poziomu istotności α i dla $n - 2$ stopni swobody, z tabeli rozkładu t-Studenta odczytuje się wartość krytyczną t_α tak, aby $P(|t| \geq t_\alpha) = \alpha$ (tab. 2.2.2). Zaleca się, aby poziom istotności do testowania jednorodności ciągów hydrologicznych był mniejszy lub równy 0,05. Jeżeli zachodzi zależność $|t| \geq t_\alpha$, to hipotezę H_0 o jednorodności ciągu należy odrzucić. Oznacza to, że w badanym ciągu pomiarowym zaznacza się istotny trend (rosnący lub malejący). Jeśli $|t| < t_\alpha$, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0, co oznacza, iż badany ciąg jest jednorodny.

Niejednorodność ciągów hydrologicznych jest często wywołana kilkoma przyczynami. Może ona – ale nie musi – implikować niejednorodność statystyczną. Warunek jednorodności ciągów ma różną wagę, w zależności od profilu badań; bardzo ważną rolę odgrywa m.in. w modelach prognostycznych.

Przykład

Zweryfikuj – na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ – hipotezę H_0, że ciąg średnich przepływów rocznych rzeki Wiar (Krówniki) w okresie 1951–1970 (tab. 2.2.3) jest jednorodny. Weryfikacji dokonaj za pomocą testu Kruskala-Wallisa.

Rozwiązanie

1. Hipoteza H_0: ciąg średnich przepływów rocznych rzeki Wiar (Krówniki) w okresie 1951–1970 jest jednorodny statystycznie

Tab. 2.2.2. Wartości krytyczne charakterystyki $t(\alpha, n)$ rozkładu t-Studenta dla $n-2$ stopni swobody oraz poziomu istotności α = 0,05 (Ozga-Zielińska, Brzeziński; 1994)

$n-2$	α = 0,05	$n-2$	α = 0,05
1	12,7062	22	2,0739
2	4,3027	23	2,0687
3	3,1824	24	2,0639
4	2,7764	25	2,0595
5	2,5706	26	2,0555
6	2,4469	27	2,0518
7	2,3646	28	2,0484
8	2,3060	29	2,0452
9	2,2622	30	2,0423
10	2,2281	32	2,0369
11	2,2010	34	2,0322
12	2,1788	36	2,0281
13	2,1604	38	2,0244
14	2,1448	40	2,0211
15	2,1314	42	2,0181
16	2,1199	44	2,0154
17	2,1098	46	2,0129
18	2,1009	48	2,0106
19	2,0930	50	2,0086
20	2,0860	55	2,0040
21	2,0796	60	2,0003

Tab. 2.2.3. Średnie przepływy roczne Wiaru (Krówniki)

Rok	Przepływ $[m^3 \cdot s^{-1}]$
1951	3,51
1952	7,12
1953	7,70
1954	4,84
1955	9,16
1956	3,75
1957	3,45
1958	3,96
1959	3,07
1960	3,43
1961	5,72
1962	6,37
1963	3,81
1964	7,11
1965	10,90
1966	8,32
1967	9,76
1968	6,12
1969	7,97
1970	7,38

2. Podział badanego ciągu na dwie (k = 2) próby o liczebności n_1 = 10 i n_2 = 10 (tab. 2.2.4, tab. 2.2.5; kol. 1 i 2)

3. Uporządkowanie elementów ciągu rosnąco i nadanie im rang (tab. 2.2.6)

4. Obliczenie sumy rang T dla każdej próby (tab. 2.2.4, tab. 2.2.5; ostatnie wiersze)

T_1 = 76

T_2 = 134

5. Wyznaczenie statystyki χ^2 według wzoru (2.2.1)

$$\chi^2 = \frac{12}{20 \cdot 21} \cdot \left(\frac{76^2}{10} + \frac{134^2}{10}\right) - 3 \cdot (20+1) \approx 4{,}806$$

6. Odczytanie wartości krytycznej (χ^2_α) z tab. 2.2.1 dla przyjętego poziomu istotności α = 0,05 i dla 1 (k-1) stopnia swobody z tablicy rozkładu χ^2 Pearsona: χ^2_α = 3,841

Tab. 2.2.4. Ciąg średnich przepływów Wiaru (Krówniki) – próba 1

Rok	Przepływ $[m^3 \cdot s^{-1}]$	Ranga
1	*2*	*3*
1951	3,51	4
1952	7,12	13
1953	7,70	15
1954	4,84	8
1955	9,16	18
1956	3,75	5
1957	3,45	3
1958	3,96	7
1959	3,07	1
1960	3,43	2
	Suma rang	76

Tab. 2.2.5. Ciąg średnich przepływów Wiaru (Krówniki) – próba 2

Rok	Przepływ $[m^3 \cdot s^{-1}]$	Ranga
1	*2*	*3*
1961	5,72	9
1962	6,37	11
1963	3,81	6
1964	7,11	12
1965	10,90	20
1966	8,32	17
1967	9,76	19
1968	6,12	10
1969	7,97	16
1970	7,38	14
	Suma rang	134

Tab. 2.2.6. Uporządkowany rosnąco ciąg średnich przepływów Wiaru (Krówniki)

Rok	Przepływ $[m^3 \cdot s^{-1}]$	Ranga
1959	3,07	1
1960	3,43	2
1957	3,45	3
1951	3,51	4
1956	3,75	5
1963	3,81	6
1958	3,96	7
1954	4,84	8
1961	5,72	9
1968	6,12	10
1962	6,37	11
1964	7,11	12
1952	7,12	13
1970	7,38	14
1953	7,70	15
1969	7,97	16
1966	8,32	17
1955	9,16	18
1967	9,76	19
1965	10,90	20

7. Porównanie (χ^2_α) z obliczoną statystyką χ^2

4,806 > 3,841, czyli $\chi^2 > (\chi^2_\alpha)$ (oznacza to, iż hipotezę H_0 należy odrzucić)

Odpowiedź

Badany ciąg średnich przepływów rocznych rzeki Wiar (Krówniki) w okresie 1951–1970 jest niejednorodny.

Zadanie

Za pomocą testu współczynnika korelacji rangowej Spearmana zweryfikuj hipotezę, że ciąg średnich przepływów rocznych rzeki Wiar (Krówniki) w okresie 1951–1970 (tab. 2.2.3) jest jednorodny. Porównaj wynik testu z wynikiem testu sumy rang.